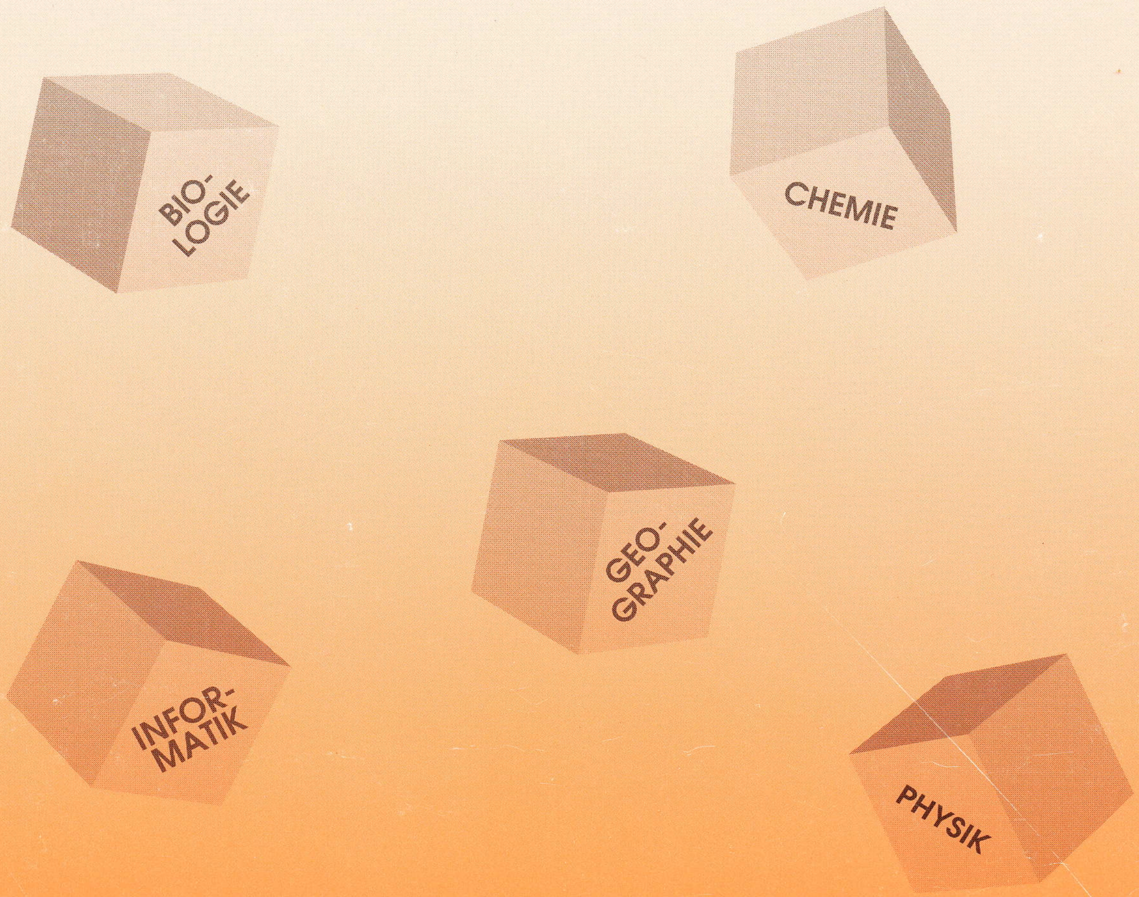
# Rekursion

Orell Füssli

ETH Fallstudien





1908 wurde die Harvard Business School gegründet. Ihr Ziel: Manager sollten bessere Wirtschaftsfachleute und effizientere Problemlöser werden. Die Professoren wählten Fälle aus dem Berufsalltag als Studienmaterial. Nach und nach entwickelten sie daraus eine eigene Unterrichtsform. Noch heute ist die Fallstudie die wichtigste Methode auf dem Weg zum begehrten MBA (Master of Business Administration). Inzwischen gehört die Fallstudie standardmässig zu vielen Ausbildungsgängen.

Mit dem Fallstudienprojekt greift die ETH Zürich diese Idee auf und macht sie für die Schule nutzbar. Damit möchte sie einen Beitrag leisten, um autonomes Lernen zu fördern und die Schüler in die wissenschaftliche Arbeitsmethodik einzuführen. Gleichzeitig bietet sie die Gelegenheit, einige Forschungsgebiete der ETH besser kennen zu lernen.

ETH
Fallstudien

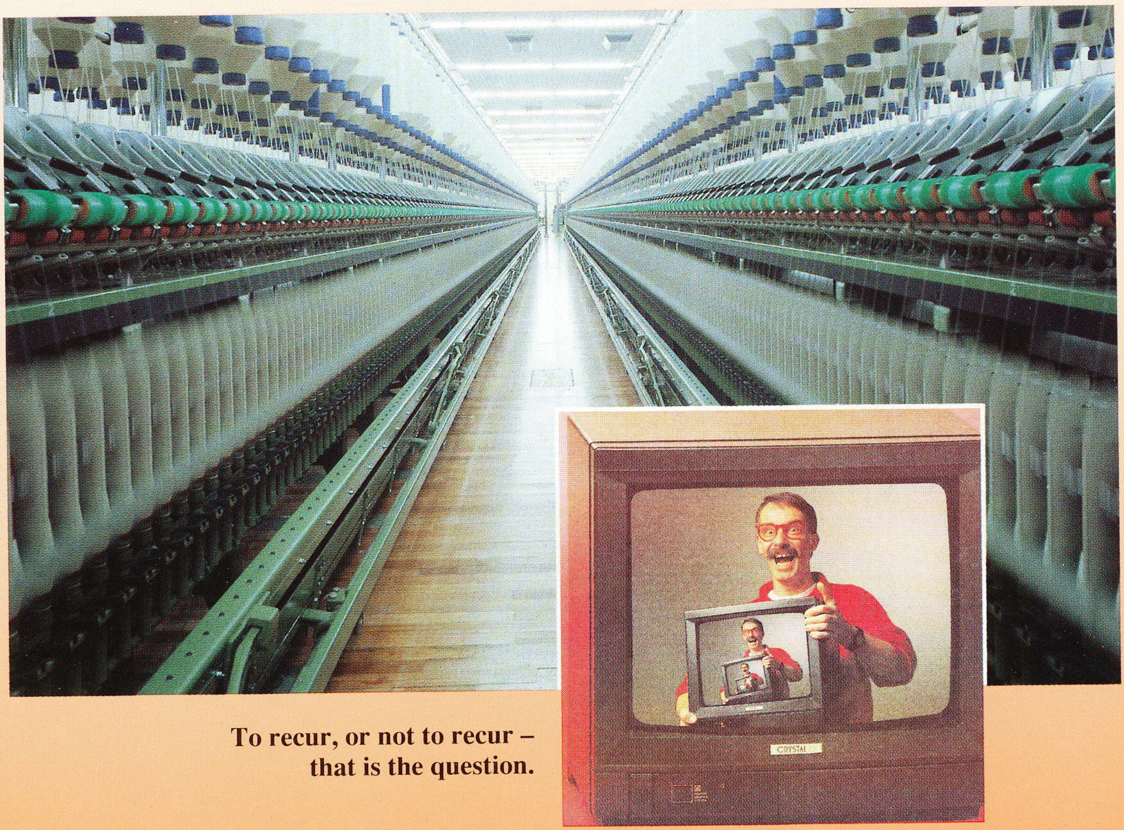
Orell Füssli

ISBN 3 280 02097 2

Quellenstudium

Beurteilen und
kritisch hinterfragen

Überdenken und
Aufgaben lösen



**To recur, or not to recur – that is the question.**

Fotos: Rieter AG, Coop Schweiz

# Rekursion

**Rückgriff in die Trickkiste?**

Fast vergessene Erkenntnisse der Mathematik, gepaart mit modernster Computertechnik, führten 1980 zur Geburt des «Apfelmännchens». Benoît Mandelbrot war es gelungen, die Bedeutung der «Fraktale» in zahlreichen Phänomenen der Natur und Gesellschaft aufzuzeigen. In der Folge entstand die fraktale Geometrie, ein faszinierender neuer Zweig der Mathematik mit ungeahnten Anwendungen. Die Enträtselung der verborgenen Strukturen fraktaler Gebilde erfordert sehr viel Theorie. Umso erfreulicher ist es, dass eine breite Öffentlichkeit hautnah Resultate aus der Forschungsfront praktisch unverdünnt auf dem eigenen Computer nachvollziehen kann.

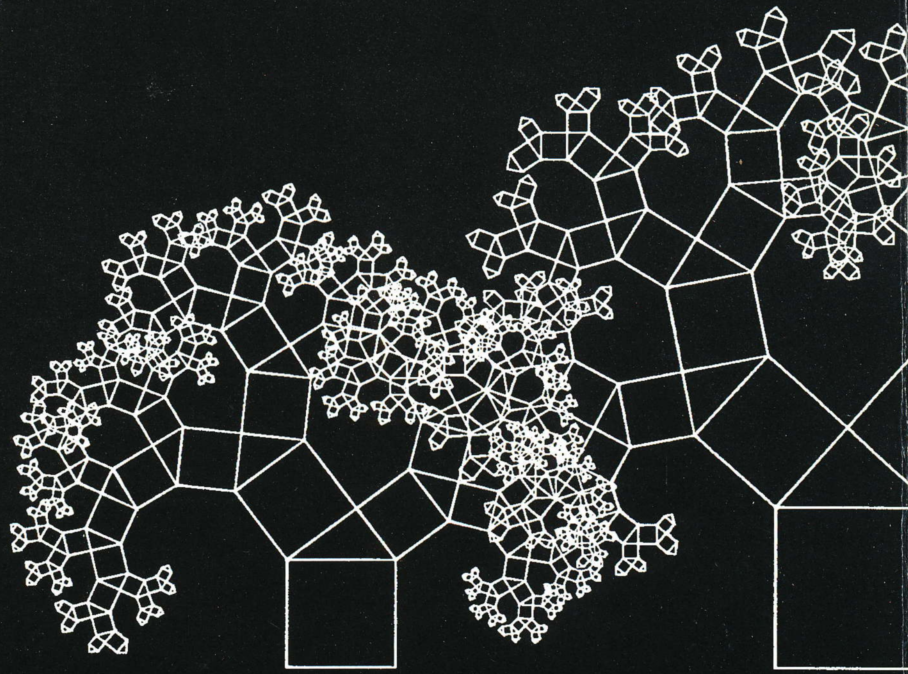
In diesem Forschungsgebiet spielen *rekursive* Techniken eine grosse Rolle. Rekursion ist ein vielgestaltiges Phänomen, aber stets geht es um die Definition einer Funktion oder eines Verfahrens durch sich selbst. Eine Flasche, auf deren Etikette eine Flasche mit der Etikette der Flasche dargestellt ist, bringt die Wiederholung durch Verschachtelung optisch sehr gut zum Ausdruck. In der Einleitung zu seinen Galgenliedern demonstriert Christian Morgenstern, wie hilflos wir übertriebenen sprachlichen Rekursionen gegenüberstehen.

Es zeigt sich, dass Schülerinnen und Schüler mit dem rekursiven Denken Schwierigkeiten bekunden. Sie überblicken nicht alle Einzelheiten des Lösungsverfahrens und benötigen einen «Vertrauenssprung», vergleichbar mit demjenigen bei der vollständigen Induktion. Zwar sind die Resultate offenbar korrekt, das Ganze sieht aber doch stark nach einem Griff in die Trickkiste aus.

Viel geläufiger scheint ihnen das *iterative* Vorgehen zu sein (Wiederholung durch Aneinanderreihung). Bei diesem Problemlöseverfahren dürfen die Schülerinnen und Schüler nach jedem Schritt die alten Ergebnisse vergessen. Keine Spur eines unsicheren Bodens mehr. Werden deshalb Alltagsprobleme meist auf iterativem Weg gelöst?

Iteration versus Rekursion. Soll und kann Rekursion vermieden werden? Ein geflügeltes Wort besagt: «Iterativ arbeiten ist menschlich, rekursiv arbeiten göttlich!» Bleibt die Rekursion als heuristisches Verfahren das Werkzeug einer Elite?

# Rekursion
# Rekursion
# Rekursion
# Rekursion
# Rek



## Die Fallstudien-Methode

In der Fallstudie behandeln Sie einen FALL, d. h. ein wissenschaftliches Problem. Dem Fall liegen reale Verhältnisse zugrunde. Das Problem können Sie nicht einfach durch die Anwendung einzelner Formeln, Rechenverfahren, Modelle oder eines «JA-NEIN-Rasters» lösen. Die Fallstudie fordert Sie auf, sogenannte «Tatsachen» zu hinterfragen und sich ein eigenes Urteil zu bilden.

Exemplarisch werden Sie auf diese Weise ein Stück wissenschaftlicher Arbeitsmethodik kennenlernen und einen ersten Einblick in ein Forschungsgebiet gewinnen.

Das beigelegte Fallmaterial enthält alle wichtigen Informationen in Form von Originaltexten. Diese Unterlagen sind nicht lehrbuchmässig aufbereitet.

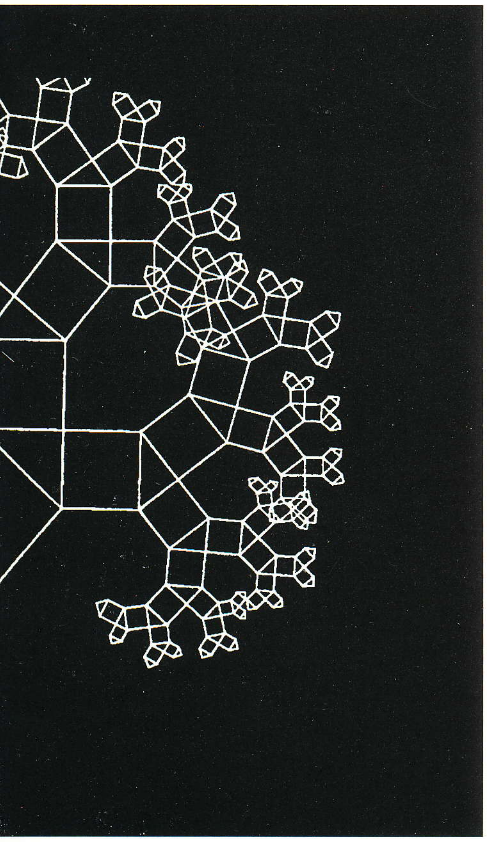
Nach dem gründlichen und kritischen Studium des Fallmaterials gehen Sie an die Lösung oder Entscheidung des Falles.

- Bilden Sie Arbeitsgruppen.
- Lesen Sie die Texte auf der Aussenmappe.
- Besprechen Sie die Aufgaben in der Gruppe.
- Alle Unterlagen für die Beantwortung der Aufgaben sind in der Innenmappe. Blättern Sie diese durch und verschaffen Sie sich einen ersten Eindruck.
- Erstellen Sie einen Arbeitsplan:
  Wieviele Unterlagen sind da?
  Wer liest was? Bis wann?
  Hausaufgaben?
  Welche Notizen sind nötig?
- Es ist wichtig, dass Sie Ihre erarbeitete Meinung anschliessend vertreten können. Planen Sie daher die Zusammenfassung und die Präsentation der Ergebnisse sorgfältig.

## Zu dieser Fallstudie

«So haben wir einen Trick, *Wiederaufruf* oder *Rekursion* genannt, um einen endlosen Prozess in Gang zu setzen... Von all den Ideen, die ich Kindern vorgestellt habe, zeichnet sich die Rekursion als die eine Idee aus, die eine besonders aufgeregte Reaktion hervorrufen konnte.» Leider verschweigt Seymour Papert, woher die Aufregung der Kinder stammte. Vermutlich waren sie entzückt darüber, dass die Turtle auf dem Bildschirm ganz unvorhergesehene Bildchen zeichnete und durch kleine Änderungen in den Prozeduren ein vollständig anderes Verhalten zeigte.

Der Fachmann setzt die Rekursion als ein mächtiges Löseverfahren überall dort ein, wo ein Problem in strukturgleiche Teilprobleme von immer geringerer Komplexität aufgespalten werden kann (divide et impera). Nach der Lösung der nun genügend einfach gewordenen Teilproble-



Graphik: A. Gächter

me, durchläuft man rückwärts die gesamte Kette der (noch unerledigten) Teilprobleme und erhält so eine Lösung des ursprünglichen Problems.

Rekursion darf sicher als universelle Idee der Mathematik und Informatik bezeichnet werden. Mit ihr kann man viele Probleme bemerkenswert einfach lösen. Ein sehr schönes Einsatzgebiet bildet die fraktale Geometrie. Zahlreiche «Rekurrierer» wenden das Verfahren rein schematisch an und drücken sich auf diese Weise vor einem tieferen Verständnis. Andere begegnen der Rekursion mit starkem Misstrauen. Muss die Einfachheit nicht mit grosser Mühe beim Durchschauen erkauft werden? Befindet man sich nicht dauernd auf schwankendem Boden, weil eine unbekannte Sache durch Rückführung auf eine andere, ebenfalls unbekannte Sache, nun im Prinzip bekannt sein soll? Besteht der Trick darin, dass man einfach glauben muss, dass das Verfahren funktioniert? Spielt sich vielleicht im Alltag rekursives Denken zu selten ab?

Viel vertrauter scheinen rein iterative Techniken beim Problemlösen zu sein. Im Unterschied zur Wiederholung durch Schachtelung bei der Rekursion, erfolgt hier die Wiederholung durch Aneinanderreihung. Die «Iterierer» machen geltend, dass ihr Verfahren keine schwebenden Berechnungen erfordert und die Komplexität eines Problems nicht verschleiert wird. Sie sind überzeugt, dass das iterative Denken viel stärker in unserem Alltag verwurzelt ist (religiöse Rituale, Spielformen, Brauchtum etc.). Der Mathematikunterricht favorisiert den Iterations-Gedanken in starkem Masse. Geläufige Beispiele sind die Multiplikation als fortgesetzte Addition, das Messen, die Zinseszins- und Integralrechnung.

Programmiersprachen enthalten in der Regel verschiedene Wiederholungsstrukturen und unterstützen zusätzlich die Rekursion. Zwar lässt sich jede Rekursion auch als Iteration programmieren (die Umkehrung gilt sowieso), aber bereits die Abarbeitung einer etwas komplizierteren Baumstruktur kann recht aufwendig und unübersichtlich werden. Für den fortgeschrittenen Programmierer mag Rekursion eine geeignete Technik sein, in der Schule hat sie nichts verloren, meinen die Iterierer. Welche Inhalte legen am Gymnasium ein rekursives Programmieren nahe? In dieser Fallstudie erhalten Sie Gelegenheit, die Problematik «Iteration versus Rekursion» zu studieren. Wenn Sie in der Schule die vollständige Induktion bereits behandelt haben, werden Sie die drei Begriffe Rekursion/Iteration/Induktion klar voneinander unterscheiden können. Falls Sie schon in die bezaubernde Welt der Fraktale eingedrungen sind, liegt genügend Material vor, um das eigene Verständnis zu überprüfen. Soll Rekursion als heuristisches Verfahren in der Schule gepflegt oder aus dem Schulalltag verbannt werden?

## Aufgaben

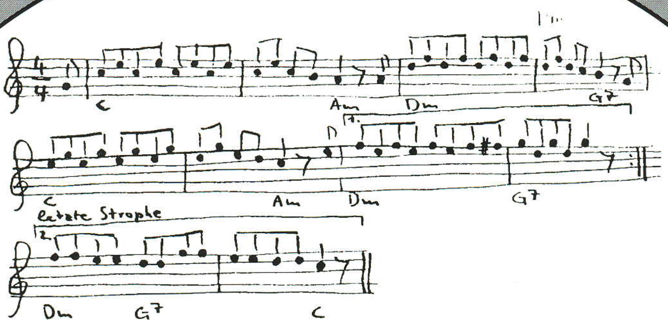
Lösen Sie zwei der folgenden Aufgaben:

1. Das Problem «Türme von Hanoi» lässt sich mit rekursiven oder iterativen Techniken lösen. Treten Sie der Partei der ITERIERER oder REKURRIERER bei? Werben Sie mit einem Plakat für Ihre Partei.

2. Welches sind die Vor- und Nachteile rekursiver Algorithmen?

3. Besitzt die Rekursion «Wurzeln in der Alltagskultur», wie Seymour Papert behauptet?

# Bim Coiffeur




bim coiffeur bin i gsässe vor em spiegel, luege dry
und gseh dert drinn e spiegel wo ar wand isch vis-à-vis
und dert drinn wider spieglet sech dr spiegel da vor mir
und i däm spiegel widerum dr spiegel hindefür

und so geng wyter: s'isch gsy win e länge koridor
i däm my chopf gwüss hundertfach vo hinden und vo vor
isch ufgreit gsy i eir kolonne, z'hinderscht isch dr chopf
i ha ne nümme gchennt, so chly gsy win e gufechnopf

my chopf dä het sech dert ir wyti, stellet öich das vor
verloren ir unäntlechkeit vom länge koridor
i ha mi sälber hinde gseh verschwinde, ha das gseh
am heiterhälle vormittag und wi we nüt wär gscheh

vor chlupf han i mys muul ufgsperrt, da sy im koridor
grad hundert müler mit ufggange win e männerchor
e männerchor us mir alei, es cheibe gspässigs gfüel
es metaphysischs grusle het mi packt im coiffeurgstüel

i ha d'serviette vo mer grissen, ungschore sofort
das coiffeurgschäft verla mit paar entschuldigende wort
und wenn dir findet i sött e chly meh zum coiffeur ga
de chöit dir jitz verstah warum i da e hemmig ha

*Mani Matter*

Fallmaterial

# Inhalt

# Glossar

**Apfelmännchen:** Fraktal mit der Form eines Apfels, welcher Kopf und Arme enthält

**Blanks:** Leerstellen

**COMAL:** moderne Programmiersprache; 1973 in Dänemark entwickelt; wird laufend verbessert und erweitert; «Common Algorithmic Language»

**divide et impera:** «teile und herrsche»; Strategie im Problemlösen; ein grösseres Problem wird in kleinere strukturgleiche Teilprobleme zerlegt und durch Zusammensetzung der Teilproblemlösungen die Lösung des Gesamtproblems erreicht

**effizient:** in möglichst kurzer Zeit und/oder mit möglichst geringem Aufwand lösbar

**Fraktal:** Figur, dessen Komponenten unabhängig von ihrer Grösse stets dieselbe Form haben (Selbstähnlichkeit)

**Heuristik:** Wissenszweig, der sich mit den Methoden und Regeln des Erfindens und Entdeckens befasst

**Iteration:** Wiederholung durch Aneinanderreihung

**LL-Rekursion:** Last-Line-Rekursion, Schwanzrekursion; der erneute Prozeduraufruf erfolgt als letzter Befehl der Prozedur

**Mandelbrot:** Benoît; Mathematiker; «Vater der Fraktale»

**Matter:** Mani (eig. Vorname: Hans Peter); Rechtskonsulent und Berner Chansonnier; 1936–1972

**Morgenstern:** Christian; deutscher Lyriker; 1871–1914

**Papert:** Seymour; Mathematiker und Computerwissenschaftler; Entwickler der Programmiersprache «LOGO»

**Paradigma:** Musterbeispiel

**Prozedur:** Unterprogramm; dient zur Strukturierung umfangreicher Programme; erlaubt die Verwendung rekursiver Techniken

**Quicksort:** schnelles rekursives Sortierverfahren; entwickelt von C.A.R. Hoare

**Rekursion:** Wiederholung durch Schachtelung

**Rekursionstiefe:** Anzahl der geschachtelten Aufrufe einer Prozedur

**seriell:** zeitlich aufeinanderfolgend; nicht gleichzeitig

**Subroutine:** vergl. Prozedur

**Termination:** Abbruch eines Prozesses; Rekursionsausstieg

**Türme von Hanoi:** altes Spiel, bei welchem Holzscheibchen nach bestimmten Regeln von einer Stange auf eine andere umgebeigt werden müssen; Paradebeispiel für einen kurzen und eleganten rekursiven Lösungsalgorithmus

**Turtle:** auch «Igel» oder «Schildkröte»; kleines Dreieck auf dem Bildschirm, welches als Zeichenroboter dient und durch Turtle-Befehle (z. B. vorwärts, links, rechts) gesteuert wird

**vollständige Induktion:** bestimmte Beweismethode in der Mathematik; auch «Schluss von n auf n+1» genannt

Informatik Spektrum

# Die Flagge von Alfanumerica

*Eine algorithmische Novelle über Iteration versus Rekursion*
erzählt im Frühjahr 1985 am Vordiplom in Informatik der ETH Zürich

Die Vereinigten Staaten von Alfanumerica hatten im Zuge der Automatisierung ihrer Flaggenindustrie einen Wettbewerb für die eleganteste Programmierung ihrer Flagge ausgeschrieben:

```
                ****************
        ********        ********
    ****    ****    ****    ****
  **  **  **  **  **  **  **  **
 * * * * * * * * * * * * * * * *
```

1. Zeile: $k$ Blanks gefolgt von $k$ Sternen
2. Zeile: zweimal ($k/2$ Blanks, $k/2$ Sterne)
. . .
und so weiter verdoppelt und halbiert

Alle eingegangenen Lösungen fielen in zwei Klassen, die iterativen und die rekursiven. Über die Auswahl der besten Lösung entbrannte zwischen den Verfechtern dieser algorithmischen Ansätze ein Bürgerkrieg, der das Land in die Iterativen Staaten von Alfanumerica (ISA) und die Rekursiven Staaten von Alfanumerica (RSA) spaltete. Beide Nationen haben die gleiche Flagge, verwenden aber ganz verschiedenartige Herstellungsalgorithmen.

a) Schreiben Sie eine Prozedur *procedure* ISA($k$: integer), welche für eine Zweierpotenz $k$ ($\leq$ die halbe Zeilenlänge des Ausgabegerätes) die Flagge iterativ ausdruckt.

b) Erklären Sie, warum die alfanumerische Terminalindustrie in RSA viel innovativer ist als diejenige in ISA; alle in RSA hergestellten Terminals erlauben Positionierung innerhalb einer Zeile, Zeilenvorschub und Zeilenrückschub.

c) Machen Sie Annahmen über die genauen Positionierungsbefehle eines modernen RSA-Terminals, und schreiben Sie dafür eine rekursive Flaggenprozedur *procedure* RSA($k$: integer).

d) Erklären Sie ein Phänomen, das sich als völlig unvorhergesehene Folge der Automatisierungswelle eingestellt hat: In beiden Ländern sieht man heute Flaggen, die um 90° gedreht im Winde wehen.

J. Nievergelt (Zürich)

# Computer-Kurzweil

Rekursion und Iteration: das Yin und Yang der Informatik, verdeutlicht am Beispiel der Türme von Hanoi und der Chinesischen Ringe.

Von A. K. Dewdney

Gute Denkspiele sind ein prima Wegweiser in jene Sphären der abstrakten Ideen, in denen Mathematiker und andere Theoretiker sich zu Hause fühlen. Die besten solcher Rätsel berühren Themen aus diesem Ideenreich, deren Bedeutung weit über die Denkspiele selbst hinausgeht.

So beruhen zwei klassische Denkspiele, die Türme von Hanoi und die Chinesischen Ringe, auf den gegensätzlichen Konzepten der Rekursion und Iteration, der Einheit und Verschiedenheit. Doch bieten sie nicht nur Stoff zu tiefgründigen Betrachtungen, sondern machen auch einfach Spaß und versetzen den Neuling in jenen angenehmen Zustand der Verwirrung, der das Zeichen des Eintritts in die Sphäre des abstrakten Denkens ist.

## Die Türme von Hanoi

Bei den Türmen von Hanoi sind drei senkrechte Stangen auf einem Holzbrett befestigt. Auf einer der Stangen steckt am Anfang eine Anzahl unterschiedlich großer, in der Mitte durchbohrter Scheiben. Sie sind nach abnehmender Größe von unten nach oben übereinandergestapelt. Diese Scheiben werden nun nach folgenden einfachen Regeln versetzt:

1. Stecke immer nur eine Scheibe von einem Stab auf einen anderen um.
2. Lege nie eine größere Scheibe auf eine kleinere.

Am Anfang hat man keine Wahl: Da nur die kleinste Scheibe zugänglich ist, kann nur sie versetzt werden (Bild 1). Als nächstes gibt es zwei (unsinnige) Züge für die kleinste Scheibe und einen Zug für die zweitkleinste. Diese kommt auf die leere Stange, da man sie auf die kleinste Scheibe nach Regel 2 nicht legen darf. Der dritte Zug ist schon nicht mehr so klar: Soll man die zweite Scheibe auf den Stapel zurücklegen, oder erneut die kleinste Scheibe umstecken – und wenn ja, auf welche Stange?

Von hier an sieht man sich einer langen Folge von Zügen gegenüber mit vielen Möglichkeiten, sich zu vertun. Aber selbst wenn man keinen Fehler macht, braucht man, wie wir noch sehen werden, $2^n - 1$ Züge, um einen kompletten Ausgangsturm mit $n$ Scheiben Scheibe für Scheibe auf eine andere Stange zu versetzen. Diese erstaunlich lange Überführungszeit selbst bei einem Turm mit verhältnismäßig wenigen Scheiben wird sehr schön durch die folgende kleine Legende illustriert (zitiert nach dem klassischen Rätselbuch „Mathematical Recreations and Essays" von W. W. Rouse Ball):

„In dem großen Tempel von Benares ... unter der Kuppel am Mittelpunkt der Welt ruht eine Messingplatte, in die drei diamantene Nadeln eingelassen sind. Jede ist eine Elle hoch und so schmal wie der Körper einer Biene. Auf eine dieser Nadeln steckte Gott am Tage der Schöpfung vierundsechzig Scheiben aus purem Gold, die größte ganz unten auf die Messingplatte und die anderen mit abnehmender Größe bis zur kleinsten ganz oben. Das ist der Turm des Brahma. Tag und Nacht versetzen die Mönche seither unermüdlich Scheibe um Scheibe von Nadel zu Nadel, gemäß dem festen und unabänderlichen Gesetz des Brahma. Dieses gebietet, daß ein jeder Mönch jeweils immer nur eine Scheibe versetzen darf und sie so auf eine Nadel stecken muß, daß keine kleinere Scheibe unter ihr liegt. Wenn dann alle vierundsechzig Scheiben von der Nadel, auf die Gott sie am Schöpfungstag gelegt hat, auf eine andere Nadel überführt sind, werden Turm, Tempel und Brahmanen gleichermaßen zu Staub zerfallen und die Welt mit einem Donnerschlag verschwinden."

Daß die Welt noch steht beweist, daß die Lösung der Aufgabe doch recht lange dauert: Selbst wenn die Mönche in jeder Sekunde eine Scheibe umstecken könnten, brauchten sie mehr als 500 Milliarden Jahre, um den ganzen Turm auf einer anderen Nadel neu zu errichten!

An dieser Stelle (und ohne Gefahr für das Universum) kann der Leser vielleicht selbst einmal die Probe aufs Exempel machen. Nehmen Sie einfach fünf Spielkarten, zum Beispiel Herz-As, -Zehn, -König, -Dame und -Bube, und legen Sie sie nach steigendem Wert übereinander. Indem Sie die Karten nun einzeln zwischen drei Plätzen hin und herbewegen, können Sie versuchen, das Problem mit fünf Scheiben zu lösen. Natürlich dürfen Sie dabei nie eine Karte auf eine mit niedrigerem Wert legen. Schaffen Sie es, den Stoß aus fünf Karten noch vor dem Weltuntergang umzusetzen? Nach obiger Formel sollten Sie nach $2^5 - 1$ oder 31 Zügen fertig sein.

## Eine Schlüsselidee

Wie geht man an die Lösung solcher Aufgaben heran? Wie kommt es, daß manche Leute Rätsel wie diese scheinbar mühelos lösen, während andere daran scheitern?

In meiner Antwort auf die zweite Frage steckt ein Hinweis auf die erste: Nach meiner festen Überzeugung benutzt jedermann in praktisch jedem Moment seines bewußten Daseins mathematische Denkweisen. Ob es sich nun um unsere Schlüsse aus dem Fernbleiben Onkel Heinrichs von der Hochzeit oder um unseren Plan zum Verstauen möglichst vieler Koffer im Auto handelt – stets ziehen wir logische Folgerungen aus gewissen Voraussetzungen. Solche Ableitungen können außerordentlich raffiniert sein. Darauf fußt mein unerschütterlicher Glaube, daß praktisch jeder, der solcher intuitiver Meisterleistungen fähig

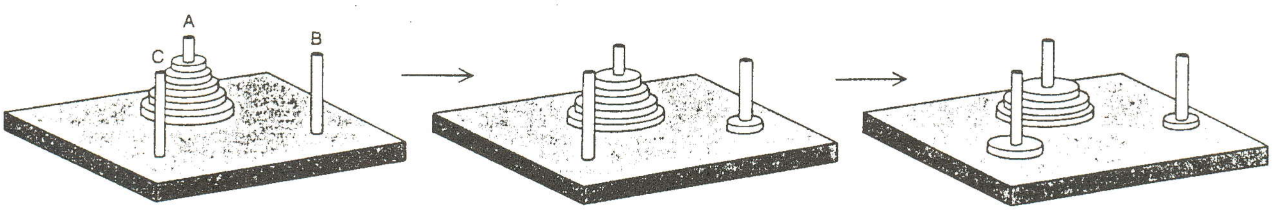



**Bild 1: Die ersten beiden Züge bei den Türmen von Hanoi.**